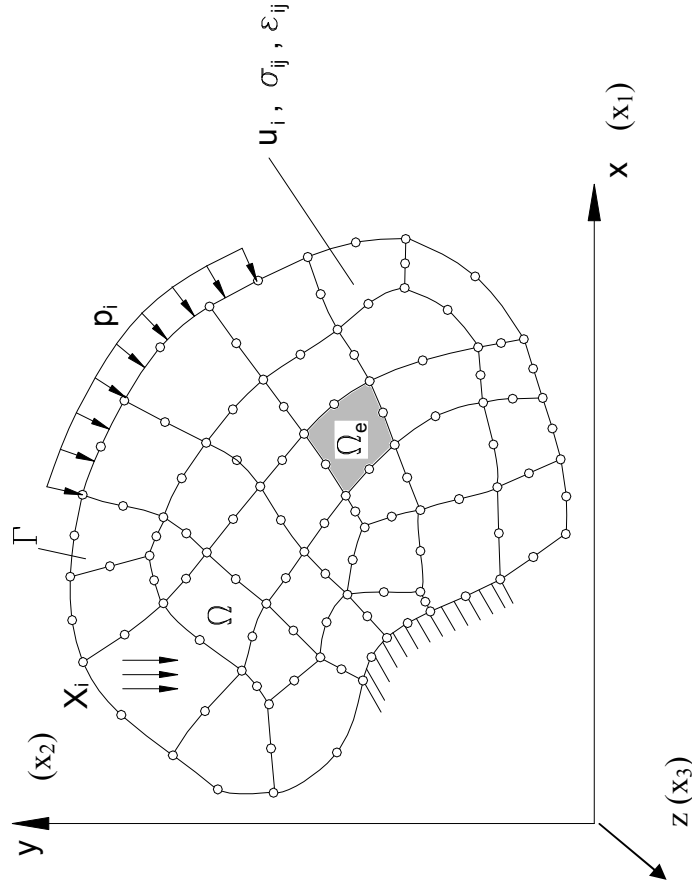


ZAGADANIENIA 2 I 3 WYMIAROWE

Wszystkie zadania inżynierskiej analizy naprężeń dotyczą w rzeczywistości trójwymiarowego stanu naprężenia. Tylko dla niektórych z nich wystarczająco dokładne mogą być modele prętowe. Pewne elementy konstrukcyjne analizowane mogą też być przy zredukowaniu opisu do dwóch wymiarów. Mamy wtedy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, płaskim stanem odkształcenia lub osiową symetrią.



Dane:

Ω –analizowany obszar,

Γ –brzeg,

p_i –obciążenia powierzchniowe $[\text{N}/\text{m}^2]$,

X_i –siły objętościowe $[\text{N}/\text{m}^3]$.

na części brzegu znane są przemieszczenia

Nieznane:

u_i –pole przemieszczeń,

ε_{ij} – pole odkształceń,

σ_{ij} – pole naprężeń,

Zależność między odkształceniami i przemieszczeniami w zapisie macierzeowym:

$$\{ \varepsilon(x, y, z) \} = [R] \{ u(x, y, z) \},$$

[R] macierz operatorów różniczkowych

W przypadku 3-wymiarowym :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\}, \\ [R] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}, \\ \{u\} &= \left\{ \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\} \end{aligned}$$

W 2-wymiarowym

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} &, \\ \{ \varepsilon \} &= \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}, \\ [R] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \\ \{u\} &= \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Prawo Hooke:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

| | | | | | |
|-----|-----|-----|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1-ν | ν | ν | 0 | 0 | 0 |
| ν | 1-ν | ν | 0 | 0 | 0 |
| ν | ν | 1-ν | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1-2\nu}{2}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1-2\nu}{2}$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1-2\nu}{2}$ |

PSN ($\sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 0$)

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}$$

| | | |
|---|---|-------------------|
| 1 | ν | 0 |
| ν | 1 | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{1-\nu}{2}$ |

Energia odkształcenia

PSO ($\varepsilon_z = 0, \gamma_{yz} = 0, \gamma_{zx} = 0$)

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

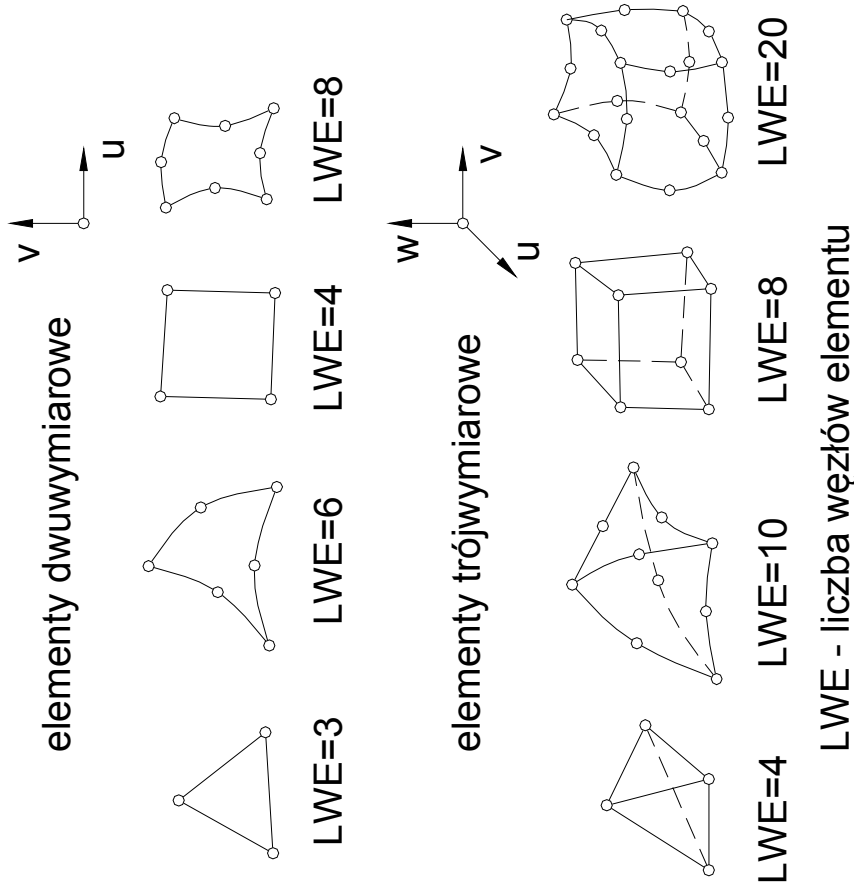
| | | |
|-----|-----|--------------------|
| 1-ν | ν | 0 |
| ν | 1-ν | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{1-2\nu}{2}$ |

$$U' = \frac{1}{2} [\varepsilon] \{\sigma\}$$

$$V = U - W_z = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} [X] \{u\} d\Omega - \int_{\Gamma} [p] \{u\} d\Gamma$$

Całkowita energia potencjalna :

Wybrane elementy skończone dla zagadnień dwu- i trójwymiarowych



Poszukiwane pola przemieszczeń wewnątrz elementu :

:

$$\{u\} = [N(x, y, z)] \{q\}_e,$$

gdzie $\{q\}_e$ - wektor przemieszczeń węzłowych, $[N]$ - macierz funkcji kształtu (zwykle wielomianów).

Na przykład dla najprostszego trójkątnego elementu dwuwymiarowego otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

gdzie N_i są funkcjami liniowymi

Szukane pola wewnątrz elementu skończonego:

$$\begin{aligned}\{u\} &= [N] \{q\}_e, \\ \{\varepsilon\} &= [R] \{u\} = [R][N] \{q\}_e = [B] \{q\}_e, \\ \{\sigma\} &= [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{q\}_e.\end{aligned}$$

Energia odkształcenia elementu Ω_e :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega_e.$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [q]_e [B]^T [D] [B] \{q\}_e d\Omega_e, \quad U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e.$$

gdzie

$$[k]_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega_e = \int_{\Omega_e} [B^*] d\Omega_e$$

Zastępcze siły węzłowe:

$$[F^x]_e = \int_{\Omega_e} [X] [N] d\Omega_e$$

$$[F^p]_e = \int_{\Gamma_e^p} [p] [N] d\Gamma_e^p$$

Rozwiązywane równanie:

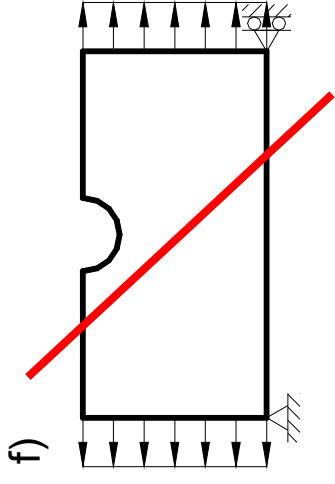
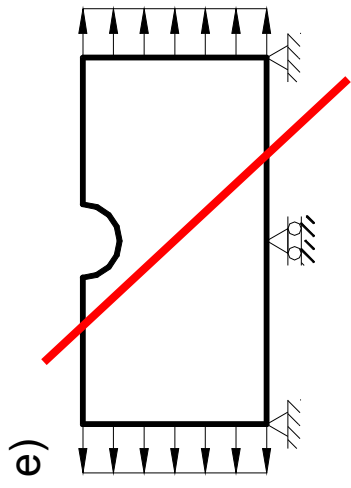
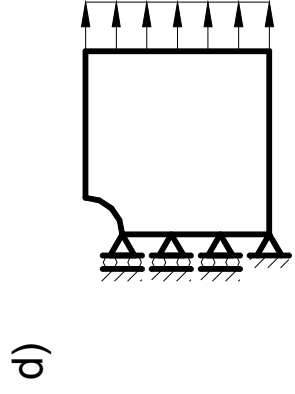
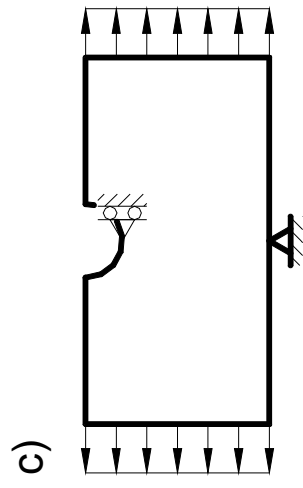
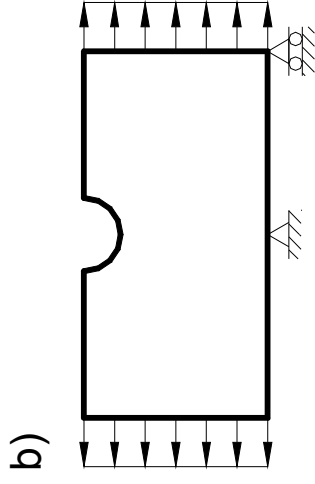
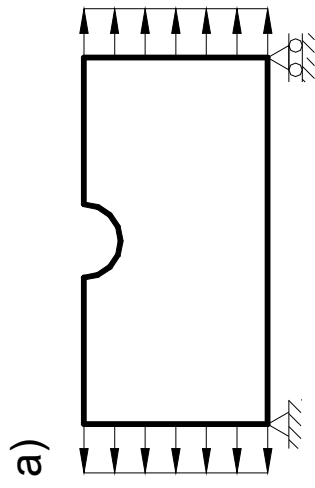
$$[K] \{q\} = \{F\}$$

KONIECZNIE Z UWZGLĘDNIENIEM WARUNKÓW BRZEGOWYCH!

Pola odkształceń i naprężeń wewnątrz elementu wyznaczone jako:

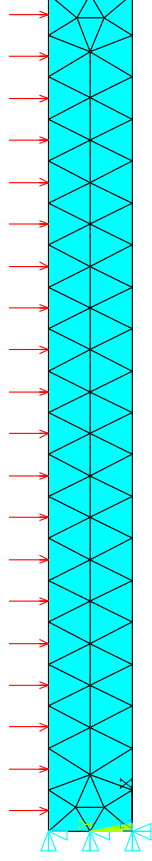
$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\}_e, \quad \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{q\}_e$$

PRZYKŁADOWE WARUNKI PODPARCIA DLA OBIEKTU SAMOZRÓWNOWAŻONEGO

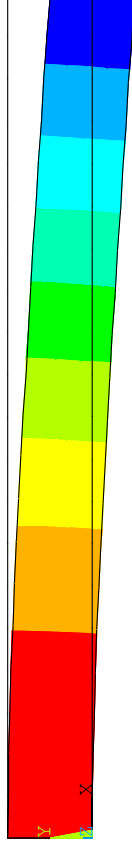


ROZWIĄZANIA ELEMENTOWE I WĘZŁOWE

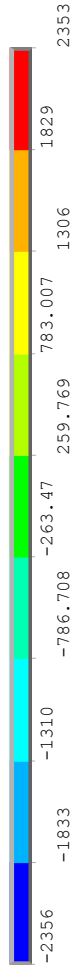
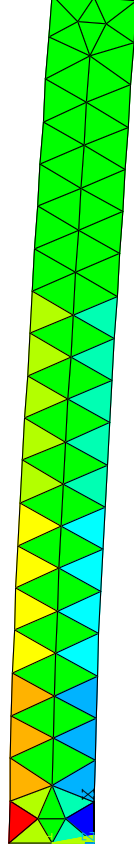
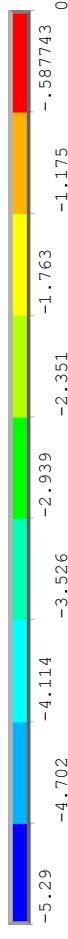
Belka wspornikowa obciążona ciśnieniem
Model MES



Przemieszczenia pionowe

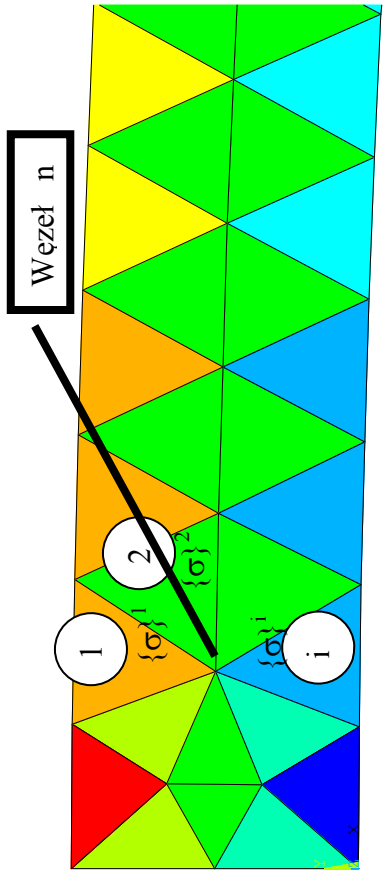


Naprężenia normalne σ_x (rozwiązanie elementowe)



Wektory naprężeń w elementach

$$\{\sigma\}^1 \neq \{\sigma\}^2 \neq \{\sigma\}^3 \neq \dots$$



Rozwiązanie węzłowe (uśrednione)

